.

Corrigé Concours Marocain: *Maths I, TSI*

14 mai 2009

I. Résultats préliminaires.

1) a) $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^y h(x)\,\mathrm{d}t \int_0^y h(t)\,\mathrm{d}t = yh(x) + H(y)$.

b) **Posons :** $u = x+t$, **alors** $\displaystyle\int_x^{x+y} h(u)\,\mathrm{d}u = H(x+y) - H(x)$, **puis utiliser le résulat de la question précédente.**

c) **En permutant les rôles de** x **et** y, **on obtient :** $xh(y) = H(x+y) - H(x) - H(y) = yh(x)$.

d) **Pendre** $y = 1$ **dans la relation** $xh(y) = yh(x)$.

2) a) F **est dérivable sur** I, **en tant que primitive d'une fonction continue** f, **avec** $F' = f$.

b) **i.** $F_1(x) = F(v(x))$ **est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec** $F_1'(x) = v'(x)F'(v(x)) = v'(x)f(v(x))$.

ii. $F_1(x) = F(v(x)) - F(u(x))$ **est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec**

$$F_1'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \tag{1}$$

iii. **Si de plus** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$, **alors** F_1 **et** F_2 **le sont aussi, en tant que composées de fonctions de classe** $\mathcal{C}^1$.

3) **Posons** $u = x+t$, **alors**

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u + \sin x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x G_1(x) + \sin x G_2(x) \end{aligned}$$

où $G_1(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u$ **et** $G_2(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u$. **D'après (1) on a :**
$G_1'(x) = g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)$ **et** $G_2'(x) = g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)$. **Ainsi**

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sin x G_1(x) + \cos x G_1'(x) + \cos x G_2(x) + \sin x G_2'(x) \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\left[-\sin x\cos u + \cos x \sin u\right]\mathrm{d}u + \cos x\left[g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)\right] \\ &\quad + \sin x\left[g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)\right] \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u + g(b+x)\left[\cos x\cos(b+x) + \sin x\sin(b+x)\right] \\ &\quad - g(a+x)\left[\cos x\cos(a+x) + \sin x \sin(b+x)\right] \\ &= \int_a^b g(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t + g(b+x)\cos a - g(a+x)\cos a \qquad \textbf{changement de variable : } t = u-x \end{aligned}$$

II. Étude d'une équation fonctionnelle

1) **Prenons $x=y=0$ dans l'équation fonctionnelle, d'où $f(0)^2=0$, donc $f(0)=0$.**

2) a) **Prendre $y=a$, avec $f(a)\neq 0$.**

   b) **Soit F une primitive de f, donc $f(x)=\dfrac{1}{f(a)}(F(x+a)-F(x-a))$ est dérivable en tant que composée et différence de fonctions dérivables, avec $f'(x)=\dfrac{1}{f(a)}(f(x+a)-f(x-a))$**

   c) **D'après la relation précècdente, on peut dire plus : que f' est continue en tant que différence de fonctions continue, mais aussi que f' est dérivable avec $f''(x)=\dfrac{1}{f(a)}(f'(x+a)-f'(x-a))$ continue, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.**

3) **Il suffit de dériver par rapport à x, avec y fixé et utiliser la relation (1), puis dériver par rapport à y avec x fixe.**

4) **En dérivant une autre fois par rapport x la 1ère relation de la question 3, on obtient et la 2ème par rapport à y, on obtient $f''(x)f(y)=f'(x+y)-f'(x-y)=f(x)f''(y)$, pour $y=a$ on a : $f''(x)f(a)=f(x)f''(a)$, or $\lambda=-\dfrac{f''(a)}{f(a)}$, d'où $f''(x)+\lambda f(x)=0$, ainsi f et solution de l'équation $z''+\lambda z=0$.**

5) **$(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle homogène du 2ème ordre à coéfficients constants, dont l'ensemble de solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, dont l'équation caractéristique est $r^2+\lambda=0$, de descriminant $\Delta=-4\lambda$.**

   a) i. **Si $\lambda>0$, alors $\Delta<0$, les solution de l'équation caractéristique sont $r_1=i\mu$ et $r_2=-i\mu$ donc la solution générale $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $z(x)=A\sin(\mu x)+B\cos(\mu x)$. Ainsi la base de l'ensemble de solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $\{x\mapsto\sin(\mu x),x\mapsto\cos(\mu x)\}$.**

      ii. **f est une solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ avec $f(0)=0$, donc $f(x)=A\sin(\mu x)+B\cos(\mu x)$ avec $B=0$. Prenons $y=0$ dans la 2ème relation de la question 3, donc $f(x)f'(0)=2f(x)$ avec f non nulle, donc $f'(0)=2=A\mu$, d'où $A=\dfrac{2}{\mu}$.**

   b) i. **Si $\lambda<0$, alors $\Delta>0$, les solution de l'équation caractéristique sont $r_1=\mu$ et $r_2=-\mu$ donc la solution générale $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $z(x)=A\mathrm{e}^{\mu x}+B\mathrm{e}^{-\mu x}=A(\cosh(\mu x)+\sinh(\mu x))+B(\cosh(\mu x)-\sinh(\mu x))=A'\sinh(\mu x)+B'\cosh(\mu x)$. Ainsi la base de l'ensemble de solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $\{x\mapsto\sinh(\mu x),x\mapsto\cosh(\mu x)\}$.**

      ii. **f est une solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ avec $f(0)=0$, donc $f(x)=A'\sinh(\mu x)+B'\cos(\mu x)$ avec $B'=0$.**
      Prenons $y=0$ dans la 2ème relation de la question 3, donc $f(x)f'(0)=2f(x)$ avec f non nulle, donc $f'(0)=2=A'\mu$, d'où $A'=\dfrac{2}{\mu}$.

   c) **Si $\lambda=0$, $f''=0$, donc $f(x)=Ax+B$, or $f(0)=0$ et $f'(0)=2$, donc $f(x)=x$.**

   d) **Application.**
   1èr cas : $f(x)=\dfrac{2\sin(\mu x)}{\mu}$, alors $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-2\cos(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y}=-2\frac{\cos(\mu x+\mu y)-\cos(\mu x-\mu y)}{\mu^2}=\frac{4\sin(\mu x)\sin(\mu y}{\mu^2}=f(x)f(y)$.
   2ème cas : $f(x)=\dfrac{2\sinh(\mu x)}{\mu}$, alors $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2\cosh(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y}=2\frac{\cosh(\mu x+\mu y)-\cosh(\mu x-\mu y)}{\mu^2}=\frac{4\sinh(\mu x)\sinh(\mu y}{\mu^2}=f(x)f(y)$.
   3ème cas : $f(x)=2x$, alors $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[t^2\right]_{x-y}^{x+y}=(x+y)^2-(x-y)^2=4xy=f(x)f(y)$.

III. Étude d'une fonction

1) **Si $0<x<1$, alors $0<x^2<1$; et si $x>1$, alors $x^2>1$.**

2) **Soit F une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$. F est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, or $f(x)=F(x^2)-F(x)$ avec ni 0 ni 1 n'est compris entre x et x^2 quand $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ (sinon la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ ne serait pas définie), d'où $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.**

3) **$f(x)=F(x^2)-F(x)$ est dérivable sur D_f, en tant que différence de composées de fonctions dérivables, avec $f'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\dfrac{2x}{\ln(x^2)}-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{x-1}{\ln x}$.**

4) **a)** **Au voisinage de 0, on a $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$, posons $u=x-1$, donc $\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)$.**

b) $\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{\ln(1+u)}=\dfrac{1}{u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)}=\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{1}{1-\frac{u}{2}+o(u)}\right)=\dfrac{1}{u}\left(1+\dfrac{u}{2}+o(u)\right)=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{2}+o(1)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}+o(1)$

c) **Du développement limité précédent, on déduit que $f'(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}=1+\dfrac{x-1}{2}+(x-1)o(1)\longrightarrow 1$ quand $x\longrightarrow 1$, et que $\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2}+o(1)\longrightarrow\dfrac{1}{2}$ quand $x\longrightarrow 1$**

5) **Étude de f au voisinage de 1.**

a) **On a $\lim\limits_{1}\left|\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right|=1<\dfrac{3}{2}$, donc $\left|\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right|\leq\dfrac{3}{2}$ au voisinage de 1, donc sur un intervalle de la forme $]1-\alpha,1+\alpha[\setminus\{1\}$.**

b) **Supposons par exemple, $1<x\leq x^2$, en intégrant l'inégalité précédente entre x et x^2, on obtient : $\left|\displaystyle\int_x^{x^2}\dfrac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t-\int_x^{x^2}\dfrac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\right|\leq\dfrac{3}{2}(x^2-x)$, or $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\dfrac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{x^2}\dfrac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t=[\ln(t-1)]_x^{x^2}=\ln(1-x^2)-\ln(1+x)=\ln\dfrac{1-x^2}{1-x}=\ln(1+x)$, d'où $|f(x)-\ln(1+x)|\leq\dfrac{3}{2}(x^2-x)$.**
Si $x\leq x^2<1$, utiliser $\displaystyle\int_x^{x^2}=-\int_{x^2}^{x}$.
On en déduit enfin que $\lim\limits_{1}f(x)=\ln 2$.

c) **D'après le théorème du prolongement de la dérivée, on a f continue en 1, dérivable au voisinage de 1, et dont la dérivée admet une limite finie (égale à 1) en 1, donc f est dérivable en 1, avec $f'(1)=1$.**

6) **Étude de f au voisinage de 0.**

a) **Si $x\in]0,1[$, alors $x\geq x^2$ et $\dfrac{1}{\ln t}\leq 0$, donc $f(x)=-\displaystyle\int_{x^2}^{x}\dfrac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t\geq 0$. D'autre part :**
$x^2\leq t\leq x\Longrightarrow 2\ln x\leq\ln t\leq\ln x\Longrightarrow-\dfrac{1}{2\ln x}\leq-\dfrac{1}{\ln t}\leq-\dfrac{1}{\ln x}\Longrightarrow f(x)\leq-\dfrac{x-x^2}{\ln x}\longrightarrow 0$, **quand $x\longrightarrow 0$, d'où f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0)=0$.**

b) **On a aussi $0\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq\dfrac{x-1}{\ln x}\longrightarrow 0$ quand $x\longrightarrow 0$, donc f est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$.**

7) **Étude de f au voisinage de $+\infty$.**
Si $x\in]1,+\infty[$, alors $x\leq x^2$ et donc $x\leq t\leq x^2\Longrightarrow\ln x\leq\ln t\leq 2\ln x\Longrightarrow\dfrac{1}{2\ln x}\leq\dfrac{1}{\ln t}\leq\dfrac{1}{\ln x}\Longrightarrow\dfrac{x^2-x}{2\ln x}\leq f(x)\leq\dfrac{x^2-x}{\ln x}\Longrightarrow\dfrac{x-1}{2\ln x}\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq\dfrac{x-1}{\ln x}$, d'où $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, ainsi la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

8) **On a $f'(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}\geq 0$ car $x-1$ et $\ln x$ sont toujours de mêmes signes, donc f est croissante.**

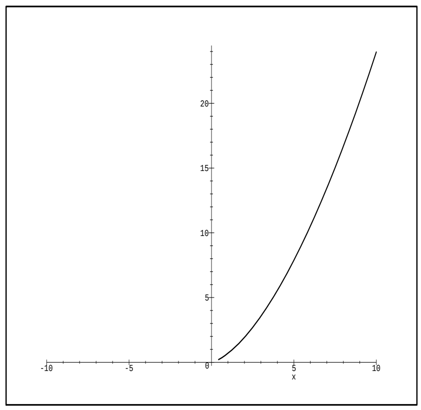
9) **On a** $f''(x) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}$ **est de même signe que** $g(x) = x\ln x - x + 1$**, avec** $g'(x) = \ln x$**, d'où le tableau de variation suivant :**

x	0	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$
f''	$+$		$+$

Ainsi $f''\ 0$ **sauf au un point 1, d'où** f' **est strictement croissante (i.e :** f **est convexe).**

10) **Traçons la courbe à l'aide de Maple.**

```
> plot(int(1/(ln(t)),t=x..x^2),x,color=black,style=line,thickness=3);
```



11) **Calcul d'une intégrale.**

a) **On a** $\lim\limits_{0} \dfrac{t-1}{\ln t} = 0$ **et** $\lim\limits_{1} \dfrac{t-1}{\ln t} = 1$**, donc la fonction** $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ **est prolongeable par continuité aux points 0 et 1, donc son intégrale sur** $]0,1[$ **converge.**

b) **Pour la 1ère égalité, il suffit de procèder au changement de variable** $u = t^2$**. Pour la deuxième, on a** $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{x^2}^{y^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$**, en utilisant la relation de Chasles de la façon suivante :** $\displaystyle\int_{x}^{x^2} - \int_{y}^{y^2} = \int_{x}^{y} + \int_{y}^{x^2} + \int_{y^2}^{y} = \int_{x}^{y} - \int_{x^2}^{y^2}$**.**

Or $\displaystyle\int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{u}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \int_{x}^{y} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **(la variable est muette).**

Donc $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x}^{y} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

c) **On a** $\lim\limits_{0} f(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{1} f(y) = \ln 2$**, d'où** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2$

Fin
à la prochaine